



TITLE:

# Duffing方程式における指数定理について(非線形現象と力学系の理論)

AUTHOR(S):

中嶋, 文雄

---

CITATION:

中嶋, 文雄. Duffing方程式における指数定理について(非線形現象と力学系の理論). 数理解析研究所講究録 1983, 506: 237-253

ISSUE DATE:

1983-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103738>

RIGHT:

## Duffing 方程式における指数定理について

岩手大 教育 中嶋文雄

### §1. まえがき. 周期的外力を有する Duffing 方程式

$$(1) \quad \ddot{x} + k\dot{x} + ax + bx^3 = B \cos t \quad (\cdot = \frac{d}{dt})$$

( $a \geq 0, k > 0, b > 0, B > 0$ ; 定数) には, 一般に複数個の周期解が存在することが知られている。N. Levinson と J. L. Massera は周期解に対し指数という概念を定義し, これら周期解の指数の間には一つの関係が成立することを示す指数定理を得た。しかし彼らの定義は, 周期解が simple という仮定, 即ち (1) の変分方程式の特性根は, その絶対値が 1 とならないという仮定の下で, 行われており, この仮定は一般には成立しない。他方, 最近, G. Sauter と著者によつて, (1) に於て同一周期の周期解は有限個しか存在しないことが示された。この事実によつて simple でない周期解に対しても指数が定義可能であることが, 名古屋大学の白岩氏によつて指摘された。

そこで本稿では, (1) を含む 2 次元周期系に対し, simple の仮定なしに指数定理の成立することを示す。但し, その証明

は、殆ど、Levinson の論文 [2] に従っている。更に、この応用として、(1) は  $\lambda$  が十分小なるとき、少くとも 3 つの周期  $2\pi$  の周期解を持つこと、並びに分岐現象を起す周期解に対し、その指数は 0 であることを示す。

### 2次元周期系

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{u} = U(t, u, v) \\ \dot{v} = V(t, u, v) \end{cases} \quad (\cdot = \frac{d}{dt})$$

を考える。ここで  $U(t, u, v), V(t, u, v)$  は  $(t, u, v) \in \mathbb{R}^3$  で連続で、 $(u, v)$  について微分可能で、 $t$  について一定の周期  $\omega > 0$  を持つとする。次の結果が知られている ([4])。

定理 1. 次の条件を仮定する；

(i) (2) は dissipative である，

(ii)  $U(t, u, v), V(t, u, v)$  は  $t$  を固定するとき、 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  について解析的である，

$$(iii) \quad \frac{\partial U}{\partial u}(t, u, v) + \frac{\partial V}{\partial v}(t, u, v) < 0 \quad (t, (u, v) \in \mathbb{R}^3)$$

このとき、(2) の周期  $\omega$  の周期解は有限個しか存在しない。

例えば, (1)に対応する 2次元系:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 + B \cos t \end{cases}$$

に於て, 上の3つの条件 (i), (ii), (iii) が満たされていることが確かめられる。よって, 任意の自然数  $n$  に対し  $\omega = 2n\pi$  と置くと, 定理より, (1) は周期  $2n\pi$  の周期解を有限個しか, 持たないことが判る。

§2. 指数定理 写像  $T: R^2 \rightarrow R^2$  を, (2) の Poincaré 写像とし,  $C$  を  $R^2$  の中の単純閉曲線で, その上に  $T$  の不動点はないものとする。  $Q \in C$  に対し,  $TQ - Q$  を始点を  $Q$ , 終点を  $TQ$  とするベクトルとすれば,  $TQ - Q \neq 0$  ( $Q \in C$ ) となる。今,  $Q$  が  $C$  上を反時計回りに,  $T$  度一回転すれば,  $TQ - Q$  は, 原点の回りを, 反時計回りに, あるいは時計回りに何回か回転する。その回転数を  $I_0$  とすると共に,

$$I(T, C) = \begin{cases} I_0 & (TQ - Q \text{ は反時計回り}) \\ -I_0 & (TQ - Q \text{ は時計回り}) \end{cases}$$

と置く。

点  $P \in R^2$  が  $\omega$ -periodic point であるとは,  $t=0$  で  $P$  を通る (2) の解が周期  $\omega$  となることである。即ち,  $P$  は  $T$  の不動点となる。  $\omega$ -periodic points が有限個しか存在しない

場合には,  $P$  の指数を次の様に定義する:

$C$  を中心  $P$  で, 半径が十分小なる円とすると,  $C$  はその上, 及び,  $P$  を除いてその内部に,  $T$  の不動点を持たない。従って,  $I(T, C)$  が定義できる。今,  $C$  を一変  $P$  に連続的に縮めて行くと,  $I(T, C)$  も定義可能で, 連続的に変化する。このとき,  $I(T, C)$  は, 常に整数値であるから, 一定値となる。よって

$$I(T, P) = I(T, C)$$

と置き,  $P$  の  $T$  による指数と呼ぶ。

定理 2 定理 1 と同じ仮定の下で, 次の事が成立する:

(i) 任意の  $\omega$ -periodic point  $P$  に対し

$$|I(T, P)| \leq 1,$$

(ii) すべて  $\omega$ -periodic points の集合  $\{P_j\}_{j=1}^n$  に対し,

$$\sum_{j=1}^n I(T, P_j) = +1$$

である。

証明は, 周期解の simple 性を仮定しないうちを除けば, I のそのと同様であるが, 参考までに, 述べようと思う。

(i) の証明 簡単のため,  $P$  を原点  $(0, 0)$  とし,  $T$  を原点の回りで展開すると,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv + o(u, v) \\ cu + dv + o(u, v) \end{pmatrix}$$

ここで,  $a, b, c, d$  は定数であり, 条件 (iii) と Abel の公式

より

$$0 < ad - bc < 1$$

となる。

故に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, 従って, 次の case 1, 2 のいずれかが成立する:

$$\text{case 1} \quad a \neq 1 \text{ or } b \neq 0$$

$$\text{case 2} \quad c \neq 0 \text{ or } d \neq 1.$$

ここでは, case 1 を仮定する。case 2 でも同様に扱われる。

$\phi$  をベクトル  $(u_1 - u, v_1 - v)$  と  $u$  軸のなす角とすれば,

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{v_1 - v}{u_1 - u} \right)$$

$$= \tan^{-1} \frac{(d-1)v + cu + o(u, v)}{(a-1)u + bv + o(u, v)},$$

$C$  を原点を中心, 半径  $r$  の円とすれば,  $(u, v) \in C$  に対し

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi),$$

故に

$$(3) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{(d-1)\cos\theta + c\cos\theta + O(r)}{(a-1)\cos\theta + b\sin\theta + O(r)}$$

となる。

さて,  $|I(T, C)| \leq +1$  を示すには,

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \phi(\theta) - \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \phi(\theta) \leq 2\pi$$

を示すことと同値である。従って, (3) の右辺の分母を

$$F(r, \theta) = (a-1)\cos\theta + b\sin\theta + O(r)$$

と書く。

$F(r, \theta) = 0$  は,  $r$  が十分小なるとき,  $\theta \in [0, 2\pi)$  で, 多くとも 2 つの根しか持たないことを示せば良い。

$\theta(r)$  を  $F(r, \theta) = 0$  の根とすると,  $0 \leq \theta(r) < 2\pi$  であるから,  $r \rightarrow 0$  のとき  $\theta(r)$  は  $[0, 2\pi]$  に集積値を持ち, その一つを  $\theta_0$  とすれば,

$$0 \leq \theta_0 \leq 2\pi, \quad F(0, \theta_0) = 0$$

となる。

他に,  $F(0, \theta) = (a-1)\cos\theta + b\sin\theta = 0$  より, 2 根

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1-a}{b}\right) \quad (0 \leq \theta_1 \leq \pi)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi$$

が求まる。

従って,  $\theta_0 = \theta_1$  或  $\theta_2$  となる,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \theta_1 \text{ 或 } \theta_2 \quad \text{となる.}$$

さて  $\theta(r)$  について,

$$(4) \quad \begin{cases} F(r, \theta(r)) = 0 & (r \geq 0; \text{十分大}) \\ \theta(0) = \theta_{\lambda'} & (\lambda' = 1 \text{ 或 } 2) \end{cases}$$

となるものを求める。case 1 の仮定の下で,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta_{\lambda'}) = -(a-1) \sin \theta_{\lambda'} + b \cos \theta_{\lambda'} \neq 0 \quad (\lambda' = 1, 2)$$

となるから, 陰関数の定理より, (4) は, 根  $\theta_1(r), \theta_2(r)$  を持ち, 更に

$$\theta(r) = \theta_1(r) \text{ 或 } \theta_2(r) \quad (r \neq 0)$$

となる。

即ち,  $F(r, \theta) = 0$  は,  $r$  が十分大なとき, 丁度 2つの根を持つ。(i) の証明は終る。

(ii) の証明. (2) は dissipative であるから, 単連結な領域  $K_0$  が存在して

$$TK_0 \subset K_0.$$

となる。故にすべての  $\omega$ -periodic points の集合  $\{P_j\}_{j=1}^n$  は  $K_0$  に含まれる。今,  $K_0$  の境界を  $C_0$  とすれば,  $C_0$  は単一閉曲線 であり,

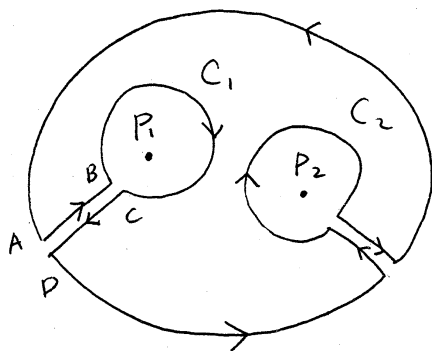


$$(5) \quad I(T, C_0) = +1$$

となることが、知られている。個々の  $P_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) を十分小さな小さな  $H$   $C_j$  で囲み,

$$(6) \quad I(T, P_j) = I(T, C_j) \quad (1 \leq j \leq n)$$

となる様にする。次に個々の  $C_j$  を  $C_0$  と同様の曲線分  
でつなぎ、これらの曲線分と  $C_0$  と  $C_j$  が全体として、単一閉  
曲線を作り、その内部に  $\omega$ -periodic points を含ませる様に  
作り、これを  $\Gamma$  とする。  $\Gamma$  は  $\omega$ -periodic points を含  
まないので、



$$(7) \quad I(T, \Gamma) = 0$$

さて、 $\Omega$  が  $\Gamma$  を反時計回りに  
一周すると、 $C_0$  は反時計

回りに、 $C_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) は、時計回りに一周され、更に、 $C_0$  と  
 $C_j$  を結ぶ曲線分の往路（例えば、図の  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{CD}$ ）では、  
 $\Omega$  は反対の向きに動くので、 $T\Omega - \Omega$  の角度の変化分は、互い  
に相殺し、微小となる。故に、

$$I(T, \Gamma) = I(T, C_0) - \sum_{j=1}^n I(T, C_j)$$

と仮定して良い。

従って, (5), (7) より

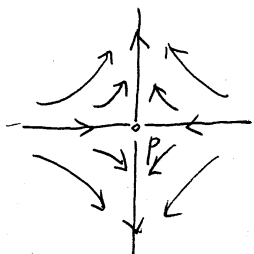
$$\sum_{j=1}^n I(T, C_j) = +1.$$

故に, (6) より,

$$\sum_{j=1}^n I(T, P_j) = +1$$

となる, (ii)の証明は終る.

さて, (2) の  $\omega$ -周期解が *directly unstable* であるとは,  
(2) の変分方程式の特性根  $\rho_1, \rho_2$  が  $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$  を  
満すことである。このとき,  $\omega$ -周期解の  $t=0$  での初期値  
を  $P$  とすれば,  $P$  の近傍での  $T$  の挙動は図のようになる, 又



$$(8) \quad I(T, P) = -1$$

となることが判る。

系. (2) が *directly unstable* な  $\omega$ -周期解を持つば,  
他に, 少なくとも 2 つの  $\omega$ -周期解が存在する。

証明.  $P_1$  を *directly unstable* な  $\omega$ -周期解の  $t=0$   
での初期値とすれば, (8) と定理 2 の (ii) より,

$$\sum_{j=2}^n I(T, P_j) = 1 - I(T, P_1) = 2.$$

故に、定理2の(i)は、指数+1の $\omega$ -periodic pointsが、  
 少なくとも2ヶ存在することを意味する。

上の結果を明示している実験結果を扱った論文[5]の一部  
 を紹介する；

dealing with

Thus we are

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.2 \frac{dx}{dt} + x^3 = 0.3 \cos t \quad (3.5)$$

As already reported in Ref. [2], pp. 245-248, there are three fixed points corresponding to the periodic solutions of Eq. (3.5). One of them is directly unstable and the other two are completely stable; details of the fixed points are given in

Table 1. Fixed Points and Related Properties Correlated with the Periodic Solutions of Eq. (3.5)

Fixed point	Response	$x$	$y$	$\rho_1, \rho_2$	Classification
1	Harmonic	-0.722	0.748	2.46, 0.12	Directly unstable
2	Harmonic	-0.311	0.069	$-0.39 \pm 0.37i$	Completely stable
3	Harmonic	0.624	1.052	$0.09 \pm 0.53i$	Completely stable

Table 1. Figure 2 shows the location of the fixed points and a pair of invariant curves which pass through the unstable fixed point 1. The mapping  $T$  is performed for every cycle of the external force, i.e., for  $t=2n\pi$ ,  $n$  being 1, 2, 3, ... The arrows in the figure indicate the direction of the movement of successive images of the mapping for increasing  $t$ . One of the invariant curves (drawn in heavy line) along which the successive images approach point 1 is the boundary of the two domains of attraction. Any initial point  $[x(0), y(0)]$  prescribed in one of these domains tends, under iteration of the

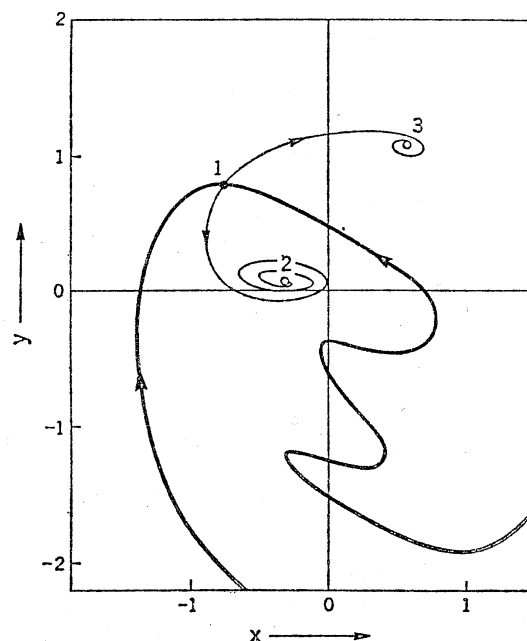


Fig. 2. Fixed points and invariant curves of the mapping for Eq. (3.5).

### §3. 指数定理と分岐現象

J. K. Hale と P. Z. Táboas は Duffing 方程式における周期解の分岐現象を研究した ([1]). ここでは、その結果の一部に於て、指数定理の立場から再検討を加える。次の方程式を考える：

$$(9) \quad \ddot{x} + \varepsilon \beta \dot{x} + ax + bx^3 = \varepsilon \cos t,$$

ここで、 $\varepsilon, \beta$  は正の parameter で、 $a, b$  は正の定数で、 $0 < a < 1$  とする。上式は、

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\varepsilon \beta y - ax - bx^3 + \varepsilon \cos t \end{cases}$$

と表わす。更に  $\varepsilon = 0$  の場合は、

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - bx^3 \end{cases}$$

となる。今、 $0 < a < 1$  より、(11) は自明でない  $2\pi$ -周期解  $(p(t), \dot{p}(t))$  を持つ。その周期軌道を  $\Gamma$  で表す。次の結果が知られている ([1])。

System (10) に於て、次の事が成立する；

定理 3.  $\Gamma$  の任意の開近傍  $U$  に於て、十分小なる正数  $\varepsilon_0 > 0$  が存在して、 $[0, \varepsilon_0]$  で定義された連続関数

$\beta(\varepsilon) > 0$  が存在して、次の事実成立する；

(i)  $0 < \beta < \beta(\varepsilon)$  の場合， $\mathcal{U}$  に留まる  $2\pi$ -周期解は丁度、2ヶ存在し，その初期値  $P_1(\beta)$ ,  $P_2(\beta)$  は  $\beta$  の連続関数となる。

(ii)  $\beta = \beta(\varepsilon)$  の場合， $\mathcal{U}$  に留まる  $2\pi$ -周期解は丁度、1ヶ存在する。

(iii)  $\beta > \beta(\varepsilon)$  ならば， $\mathcal{U}$  に留まる  $2\pi$ -周期解は存在しない。

さて，System (10) に対する Poincaré 写像を  $T(\beta, \varepsilon)$  で表す。

#### 定理 4

(i)  $\beta = \beta(\varepsilon)$  のとき， $\mathcal{U}$  に留まる  $2\pi$ -周期解の初期値を  $P_0$  とすると，

$$I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon), P_0) = 0 \quad \text{である，}$$

(ii)  $0 < \beta < \beta(\varepsilon)$  のとき， $\mathcal{U}$  に留まる 2ヶの  $2\pi$ -周期解の初期値  $P_1(\beta)$  と  $P_2(\beta)$  に対し，

$$I(T(\beta, \varepsilon), P_1(\beta)) + I(T(\beta, \varepsilon), P_2(\beta)) = 0$$

となる。

更に， $\mathcal{U}$  に留まる 2ヶの  $2\pi$ -周期解は少くとも 1ヶ存在し，従って，(10) は少くとも 3ヶの  $2\pi$ -周期解を持つ。

### 定理 4 の証明

Step 1.  $C$  を  $P_0$  を中心とする十分小なる円とすれば、次の事が成立する：

(i)  $\beta = \beta(\varepsilon)$  のとき、 $C$  上及び、 $C$  内に含まれる  $2\pi$ -periodic point は、 $P_0$  の他には存在しない。この事は、 $2\pi$ -periodic points の有限性より明らかである。

(ii)  $0 < \beta < \beta(\varepsilon)$  で、 $\beta$  が  $\beta(\varepsilon)$  に十分近い場合、このとき  $C$  に含まれる  $2\pi$ -periodic points は  $P_1(\beta)$  と  $P_2(\beta)$  の 2 つだけである。実際、 $P_1(\beta)$  と  $P_2(\beta)$  の連続性より、 $\beta \rightarrow \beta(\varepsilon)$  のとき、 $P_1(\beta) \rightarrow P_0$ 、 $P_2(\beta) \rightarrow P_0$  となり、従って  $P_1(\beta)$  と  $P_2(\beta)$  は  $C$  の中に含まれる。次に  $C$  の中には、この他に  $2\pi$ -periodic points は存在しないことを示す。 $C$  の中の任意の  $2\pi$ -periodic point を  $P$  とし、 $P$  を初期値とする解を  $(x(t), y(t))$  とおく。 $\beta = \beta(\varepsilon)$  のとき、 $P_0$  を初期値とする解を  $(x_0(t), y_0(t))$  とおく。 $C$  が十分小であるから、 $P$  と  $P_0$  は近く、又  $\beta$  は  $\beta(\varepsilon)$  に十分近い。従って、解の初期値と parameter に関する連続性より、 $(x_0(t), y_0(t))$  は  $(x(t), y(t))$  に近い。今、 $(x_0(t), y_0(t))$  は  $U$  に留まるので、 $(x(t), y(t))$  も  $U$  に留まる。従って、定理 3 の (i) より、 $P = P_1(\beta)$  或  $P = P_2(\beta)$  となる。

(iii)  $\beta > \beta(\varepsilon)$  で、 $\beta$  が  $\beta(\varepsilon)$  に十分近い場合、

$C$  に含まれる  $2\pi$ -periodic point は存在しないことより,  
(ii) と同様にして示される。

Step 2. (i) より,  $I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon); C)$  が定義出来て,

$$I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon); P_0) = I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon); C)$$

となる。

$T(\beta, \varepsilon)$  は  $\beta$  について連続であるから,  $\varepsilon$  を固定して,  $\beta$  を  $\beta(\varepsilon)$  の十分近傍で考えると,  $T(\beta, \varepsilon)$  は  $C$  上に不動点を持たず,  $I(T(\beta, \varepsilon); C)$  が定義可能となる。 $I(T(\beta, \varepsilon), C)$  は,  $\beta$  について連続的に変化し, 又常に整数値であるから  $I(T(\beta, \varepsilon); C)$  は一定となる。故に  $\beta$  を  $\beta(\varepsilon)$  に十分近づければ,

$$(12) \quad I(T(\beta, \varepsilon); C) = I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon); C)$$

$$= I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon); P_0)$$

となる。

さて, 上式で  $\beta > \beta(\varepsilon)$  の場合を考えると, Step 1 の (iii) より,  $C$  の中には,  $T(\beta, \varepsilon)$  は不動点を持たないから,

$$I(T(\beta, \varepsilon); C) = 0$$

が結論される。

故に, (12) より,  $\beta$  を  $\beta(\varepsilon)$  に十分近づければ

$$(13) \quad I(T(\beta, \varepsilon); C) = I(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon); P_0) = 0$$

となる。

Step 3. 次に  $0 < \beta < \beta(\varepsilon)$  とする。  $I(T(\beta, \varepsilon), P_i(\beta))$  ( $i=1, 2$ ) は,  $\beta$  について連続的に変化し, 又常に整数値であるから,  $I(T(\beta, \varepsilon), P_i(\beta)) = \text{一定}$  となり,

$$(14) \quad \sum_{i=1}^2 I(T(\beta, \varepsilon), P_i(\beta)) = \text{一定} = k \quad \text{となる。}$$

さて,  $0 < \beta < \beta(\varepsilon)$  で,  $\beta$  が  $\beta(\varepsilon)$  に十分近い場合には, Step 2 の (ii) より,  $C$  の中に含まれる  $2\pi$ -periodic point は  $P_1(\beta)$  と  $P_2(\beta)$  の 2 つだけであるから,

$$I(T(\beta, \varepsilon); C) = I(T(\beta, \varepsilon), P_1(\beta)) + I(T(\beta, \varepsilon), P_2(\beta))$$

となる。故に, (13) より,

$$\sum_{i=1}^2 I(T(\beta, \varepsilon), P_i(\beta)) = 0$$

が得られ, 従って, (14) に依り,  $k = 0$  が結論される。

Step 4. 定理 2 より,  $\forall \beta$  ( $0 < \beta < \beta(\varepsilon)$ ) に対し,

$$\sum_{i=3}^n I(T(\beta, \varepsilon), P_i) = 1 - \sum_{i=1}^2 I(T(\beta, \varepsilon), P_i(\beta)) = 1.$$

よって,  $P_1(\beta), P_2(\beta)$  の他に, 指数 +1 の  $2\pi$ -periodic points  $P_3$  が, 少なくとも一つ存在する。  $P_3$  を初期値とする  $2\pi$ -周期解は  $U$  に留まらなことは, 定理 3 の (i) より明らかである。



最後 12. 準線型方程式

$$(15) \quad \ddot{x} + \varepsilon k \dot{x} + a x + \varepsilon b x^3 = B \cos t$$

を考える。ここで、 $\varepsilon$  は正の parameter,  $k, a, b, B$  は正の定数とし,  $0 < a < 1$  とする。

系. もし,  $\varepsilon$  が十分小ならば, (15) は少くとも, 3 個の  $2\pi$ -周期解を持つ。

証明.  $u = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{B} x$  とおくと, (15) は

$$\ddot{u} + \varepsilon k \dot{u} + a u + b B^2 u^3 = \sqrt{\varepsilon} \cos t \quad \text{となり,}$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \delta \quad \text{とおくと,}$$

$$(16) \quad \ddot{u} + \delta^2 k \dot{u} + a u + b B^2 u^3 = \delta \cos t \quad \text{となる。}$$

ここで, 改めて,  $\delta \rightarrow \varepsilon$ ,  $\delta k \rightarrow \beta$  とすれば, 上式は, (9) の形になる。故に, 定理 4 より, 正の連続関数  $\beta(\delta)$  が存在して,  $0 < \delta k < \beta(\delta)$  ならば, (16) は, 3 個の  $2\pi$ -周期解を持つことになる。この事は,

$$\delta < \frac{1}{k} \min_{\delta \geq 0} \beta(\delta)$$

とすれば, 常に満たされていゝ。証明は終る。

## 参考文献.

- [1] J.K. Hale & P.Z. Táboas, Interaction of damping and forcing in a second order equation, *Nonlinear Analysis, Theory, Method & Applications*, vol. 2, No. 1, pp 77-84 (1978).
- [2] N. Levinson, Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, *Annals of Mathematics*, vol. 45, No. 4, pp 723-737 (1944).
- [3] J. L. Massera, The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, *Annals of Mathematics*, vol. 50, No. 1 (1949).
- [4] F. Nakajima & G. Seifert, The number of periodic solutions of 2-dimensional periodic systems, to appear in *J. Diff. Equations* (1983).
- [5] C. Hayashi, T. Ueda & H. Kawakami, Solutions of Duffing's equation using mapping concepts, *Proc. 4th Int. Conf. on Nonlinear Oscillations*, pp. 25-40, Prague, (1968).